DS n°3 : Complexes, Applications, Fonctions usuelles, Intégration, ED

Durée : **4h**. Calculatrices non autorisées.
La clarté du raisonnement et la lisibilité de la copie pourront faire varier la note de ± 1 point.
La difficulté des exercices est (plus ou moins) progressive.

Exercice 1 : Équations différentielles

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1) Résoudre sur $]0,+\infty[$ le problème suivant : $\begin{cases} xy' + y = e^{-x} \\ y(1) = 0 \end{cases}$

2) On cherche à résoudre l'équation $(x \ln x)y' - y = \dfrac{2}{x}(\ln x + 1)$ sur l'intervalle $]1,+\infty[$.

- **a)** Résoudre l'équation homogène associée.
- **b)** Chercher une solution particulière de la forme $x \mapsto Cx^{\alpha}$ avec $C, \alpha \in \mathbb{R}$ à déterminer.
- **c)** Conclure.

Exercice 2 : Intégrales et complexes

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1) Par une intégration par parties, calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arccos x dx$.

2) Calculer $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{ix} - e^{i5x}}{e^{ix} + e^{i5x}} dx$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = -4(1+i)$.

Exercice 3 : Application complexe

On note $E = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et on considère la fonction $f : E \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{\overline{z} + 1}{z - 1}$.

1) Montrer que pour tout $z \in E$, $f(z) \neq 1$.

2) Déterminer l'ensemble $f(i\mathbb{R})$.

3) f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

4) Montrer que $f^{-1}(\mathbb{R}) = (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}) \setminus \{1\}$.

Tournez la page S.V.P.

Problème : Primitives réciproques

On note $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On considère les fonctions suivantes :

$$f : I \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \int_0^x \frac{1}{\cos t} dt \qquad\qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch} t} dt$$

1) Justifier que f et g sont dérivables et calculer leurs dérivées.

2) Justifier que pour tout $t \in I$, on a

$$\cos t = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}$$

3) À l'aide du changement de variables $u = \tan \frac{t}{2}$, montrer que :

$$\forall x \in I \qquad f(x) = \ln\left(\frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}}\right)$$

4) (Facultatif) Si vous n'avez pas répondu à la question 1, utilisez le résultat de la question précédente pour le faire (pour la fonction f uniquement).

5) En déduire que : $\quad \forall x \in I \qquad f'(x) = \mathrm{ch}(f(x))$

6) En déduire que : $\quad \forall x \in I \qquad (g \circ f)(x) = x$

7) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, donner une expression simple de $g(y)$. Vérifier que $g(y) \in I$.

8) Déduire des questions précédentes que :

$$\forall x \in I \quad \forall y \in \mathbb{R} \qquad \left(y = \int_0^x \frac{dt}{\cos t}\right) \iff \left(x = \int_0^y \frac{dt}{\mathrm{ch} t}\right)$$

Exercice 4 : La fonction arccotangente

On rappelle que la fonction cotangente est définie par

$$\cot : x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}$$

On notera $D = \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ son ensemble de définition. Enfin, on note $I =]0, \pi[$

1) Montrer que cot est une bijection de I sur un intervalle à préciser. Dans la suite, on notera arccot sa bijection réciproque.

2) Montrer que la fonction arccot est dérivable sur I et calculer sa dérivée. On simplifiera l'expression de la dérivée en faisant disparaitre toute fonction trigonométrique.

3) Montrer que pour tout $x \in I \setminus \{0\}$, on a $\mathrm{arccot}\left(\frac{1}{x}\right) = \arctan x$.

Quel est le nombre le plus moche ? C'est -1, car il est hi-deux.